УДК 336.77.037

Фартушний І.Д.
канд. фіз.-мат. наук,
Ковтун Д.В.
Національний технічний університет України "КПІ"

МОДЕЛЬ ПЕРЕСТРАХУВАННЯ РИЗИКІВ

Наведено модель факультативного квотно-пропорційного перестрахування, яка визначає доцільність перестрахування на основі заданих критеріїв. Розроблено програмний продукт, в основу алгоритму роботи якого закладено досліджувану модель та критерії визначення. Прикладна програма дає змогу визначати автоматично, чи потрібне перестрахування, та коефіцієнт власного утримання, якщо перестрахування потрібне.

The model optimal quota-proportional reinsurance, is presented in the work. The model determines expedience of reinsurance on the basis of the set criteria. A software product is developed the probed model and criteria of determination is stopped up in basis of algorithm of work of which. The application program allows to determine automatically or it is needed reinsurance and coefficient of own maintenance if reinsurance it is needed. Analogues the resulted method of calculation in literature were not found.

Ключові слова: перестрахування, факультативне квотно-пропорційне перестрахування, страховий портфель, коефіцієнт власного утримання, допустима вірогідність.

Вступ. Виникнення перестрахування як системи перерозподілу страхових ризиків і збитків історично зумовлене розвитком світового господарства, появою нових об'єктів страхування та пошуком страховиками нових форм і методів їх страхового захисту на якісно новій фінансовій основі. Страхові компанії здатні виконувати свої безпосередні функції лише за умови створення багаторівневої системи страхового захисту, яка неможлива без застосування перестрахування [3].

Перестрахування забезпечує фінансову надійність функціонування страхових компаній, динамічний розвиток національного страхового ринку, збільшення його місткості. Застосування можливостей перестрахування є вкрай необхідним для молодих і малопотужних страхових ринків країн з перехідною економікою, у т. ч. і України, в якій перестрахування тільки починає розвиватися [5].

Постановка завдання. Нові ризики передаються страховиком в так зване факультативне квотно-пропорційне перестрахування. Модель, що розглядається, статистична і не відображає зростання суми зібраних внесків (шляхом інвестицій) і інфляційні процеси. Об'єкт дослідження – величина власного утримання страховика, тобто та частина ризику, яку страховику, виходячи з "розумних" міркувань, краще залишити за собою, та величину, яку страховику вигідно віддати на перестрахування.

У розпорядженні страхової компанії, тобто страховика, є страховий портфель (СП), що складається з N договорів страхування (ДС); нижче цей СП називається "даний". Приєднання до нього нового ДС або, як то кажуть, нового ризику призводить до утворення "поповненого" СП, що складається з $(N+1)$ ДС.

Методологія. Результати дослідження отримано на основі двох критеріїв, в одному з яких фінансова стійкість фірми не зменшується деякого рівня, а в другому не змінюється при прийомі нового договору.

Результати дослідження.

Кожен ДС (у т. ч. і новий, якому привласнюється номер $N+1$) характеризується такими параметрами:

1) максимальний об'єм відповідальності C_i, де i – номер ДС $i=\overline{1..N+1}$;

2) отримана страховиком премія T_i, $i=\overline{1..N+1}$, точніше та частина страхового внеску, яка включається до страхового фонду, призначена для покриття майбутніх страхових відшкодувань;

3) ймовірність страхової події p_i $i=\overline{1..N+1}$ (мається на увазі, що p_i – ймовірність настання хоча б однієї страхової події протягом часу, що залишився до закінчення терміну дії i-го ДС);

4) розподіл ймовірності випадкової величини "тягаря збитку" X_i, точніше – відношення суми виплачуваних відшкодувань по i-му ДС, починаючи з цього моменту до закінчення терміну дії ДС, за умови настання хоча б однієї страхової події $i=\overline{1..N+1}$.

Окрім премій, зібраних за наявними ДС, у розпорядженні страховика є "початковий капітал" , призначений для покриття можливих збитків pf даним СП (цей капітал може дорівнювати нулю). Крім того, слід взяти до уваги, що за деякими ДС даного СП могли відбуватися виплати: їх суму позначимо за W.

Нехай m_i – середнє значення абсолютної виплати по i -му ДС. Передбачатимемо, що в середньому договори не збиткові, тобто для всіх $i=\overline{1..N+1}$ премія $T_i>m_i$. Тому при орієнтації лише на середні значення страховикові слід було б прийняти на страхування весь новий ризик.

Мінімальна допустима ймовірність беззбитковості (позначимо її q) задається, як правило, самим страховиком. Цю ймовірність можна вважати мірою фінансової стійкості страховика. Формально обговорювана умова записується так:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{N+1} T_i + U - W \geq \sum_{i=1}^{N+1} V_i\right\} \geq q, \tag{1}$$

де q – число, задане страховиком, між 0 і 1 (близьке до одиниці), а V_i –випадкова величина страхового відшкодування по i -му договору, $i=\overline{1..N+1}$.

Можливий інший підхід до прийняття нового ризику в страхування, що формально є окремим випадком попереднього: ймовірність, виписана в лівій частині (1), має бути не менша ймовірності беззбитковості до прийняття нового ризику (фінансова стійкість не повинна зменшитися), тобто:

$$P\left\{\sum_{i=1}^{N+1} T_i + U - W \geq \sum_{i=1}^{N+1} V_i\right\} \geq P\left\{\sum_{i=1}^{N+1} T_i + U - W \geq \sum_{i=1}^{N} V_i\right\} \tag{2}$$

Якщо нерівність (1) (або (2)) не виконується, то новий ризик не може бути прийнятий в страхуванні в "повному обсязі" (тобто з максимальною відповідальністю C_{N+1}), і виникає необхідність перестрахування.

Перейдемо до конкретних викладень. Перш за все відмітимо, що випадкову величину страхового відшкодування V_i по i -му ДС можна представити такою формулою $T_i = I_i X_i C_i$.

Величини I_i, X_i, $i=\overline{1..N+1}$ будемо вважати незалежними, математичні очікування дисперсії випадкових величин – заданими або, точніше, визначеними за статистикою, що є у страховика.

Вводячи позначення E, D для математичного очікування і дисперсії відповідно, покладемо

$$w_i = E[T_i / C_i] = p_i E[X_i] \tag{3}$$

$$d_i^{\,2} = D[T_i / C_i] = p_i E[X_i^{\,2}] - p_i^2 E^2[X_i].$$

(Величини w_{N+1} і d_{N+1} не залежать від C'_{N+1}). В цьому випадку $m_i = w_i C_i$, $i=\overline{1..N+1}$. Нехай $T_0 = \sum_{i=1}^{N} T_i - W$ – повна сума страхових премій по наявному СП з врахуванням зроблених виплат відшкодувань, але без початкового капіталу. Позначимо через T'_{N+1} ту частину премії по новому ризику, яка залишилася у розпорядженні страховика.

Відповідно до (1) має виконуватись умова

$$P\left\{\sum_{i=1}^{N} V_i + V'_{N+1} > U + T_0 + T'_{N+1}\right\} \leq 1-q \tag{4}$$

Враховуючи, що випадкові величини V_i є незалежними, і спираючись на центральну граничну теорему,передбачимо, що для будь-якого $C'_{N+1} \leq C_{N+1}$ при великих N розподіл випадкової величини $Z = \sum_{i=1}^{N} V_i + V'_{N+1}$ можна з достатньою точністю наблизити нормальним розподілом. Іншими словами, вважатимемо розподіл Z нормальним з відповідним математичним очікуванням і дисперсією. У цьому випадку, оскільки

$$EZ = \sum_{i=1}^{N} m_i + w_{N+1} C'_{N+1}, \; DZ = \sum_{i=1}^{N} d_i^{\,2} C_i^2 + d^{\,2}{}_{N+1} \; (C'_{N+1})^2 .$$

Беручи до уваги (3), неважко підрахувати, що (4) еквівалентно нерівності

$$\hat{O}(D) \geq q , \tag{5}$$

де $\Phi(x)$ – стандартна нормальна функція розподілу, і

$$D = \frac{U + T_0 + T'_{N+1} - \sum_{i=1}^{N} m_i - w_{N+1} C'_{N+1}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} d_i^2 C_i^2 + d_{N+1}^2 (C'_{N+1})^2}} .$$

Ліва частина (5) є оцінкою вірогідності беззбитковості операцій страхування по всьому СП, що складається з $N+1$ ДС.

Відомо, що (5) еквівалентно нерівності

$$D \geq Q , \tag{6}$$

де Q – q-квантіль нормального розподілу, тобто $\Phi(Q) = q$.

Перейдемо до перестрахування. Нехай $\tilde{N}'_{N+1} = r\tilde{N}_{N+1}, 0 \leq r \leq 1$. Коефіцієнт r назвемо відносним СУ. Оскільки йдеться про квотно-пропорційне перестрахування, відповідна утриманій частині ризику премія

$$T_{N+1} = rT_{N+1} .$$

Покладемо $m_0 = \sum_{i=1}^{N} w_i C_i$ (математичне очікування майбутніх СП) та $s_0^{\,2} = d_i^2 C_i^2$ (дисперсія тієї ж величини).

Нехай $m = w_{N+1} C_{N+1}$ (математичне очікування майбутніх виплат по новому ДС при повній відповідальності C_{N+1}), $s^{\,2} = d_{N+1}^2 C_{N+1}^2$ (дисперсія тієї ж величини), $T = T_{N+1}$ (повна премія за новим ДС).

Відповідно з цим

$$D = \frac{U + T_0 - m_0 + r(T - m)}{\sqrt{s_0^{\,2} + r^2 s^{\,2}}} \tag{7}$$

Запишемо тепер величини , T_0 та T в природному для них масштабі, точніше, покладемо $U = us_0$; $T_0 = m_0 + t_0 s_0$; $T = m + ts$.

Останні співвідношення є суттю визначення коефіцієнтів u, t_0, t . Це вже безрозмірні величини, що отримуються за допомогою нормування величин U, T_0, T [1,2].

Нехай $A = s_0 / s$ $x = rA$.

Величина x характеризує прийняте СУ і задовольняє нерівності 0J x J*A*. Значенню $x = 0$ відповідає повна відсутність нового ризику, а $x = A$ – прийняття нового ризику в повному обсязі (відсутність перестрахування).

Неважко перевірити, що у введених позначеннях $D = D(x) = (u + t_0 + tx)/\sqrt{1 + x^2}$.

Кінцева умова (1) або, що те саме, (6) записуються так

$$D(x) \geq Q \quad (8)$$

Величина $D(0)$ відповідає даному СП (без нового ДС), і умову (2) тим самим можна записати так

$$D(x) \geq D(0) = u + t_0 \quad (9)$$

Відповідно до викладеного вище задача зводиться до знаходження максимального , який не перевищує і задовольняє залежно від підстановки умови (8) чи (9).

Знаходження коефіцієнта власного утримання для перестрахування. Покладемо $C = u + t_0$. Елементарний аналіз показує, що функція $D(x)$ при $x \geq 0$ досягає максимума в точці $x_0 = t / c$ та $D(x) \to t$ при $x \to \infty$. Надалі будемо вважати, що, коли настає умова (1) (або еквівалентне –(8)), вже даний СП задовольняє цій умові, тобто

$$D(0) = c \geq Q \quad (10)$$

Іншими словами, даний портфель достатньо стійкий. Аналіз протилежної ситуації аналогічний наведеним нижче міркуванням.

Почнемо з найбільш простого випадку.

Випадок 1. Нехай $c \leq t$. Графік функції $D(x)$ приведено на рис. 1. Вона росте при $0 \leq x \leq x_0$ від $c < t$ до

максимального значення $D(x_0) = D_0 = \sqrt{c^2 + t^2}$, а потім спадає до величини t на нескінченності. При цьому завжди не менше , та, маючи на увазі (10), не менше . Отже, “чим менше (чи), тим краще”, тобто перестрахування не потрібно (чи) ні при (8), ні при (9).

Випадок 2. Нехай $c > t$. Графік $D(x)$ наведено на рис. 2. Функція знову росте при $0 \leq x \leq x_0$ від $c \geq t$, то значення *c* приймається двічі, більш точніше $D(x') = c$, де

$$x' = \frac{2 \cdot c \cdot t}{c^2 - t^2} \quad (11)$$

Число x' відіграє тут основну роль.

(2a) Нехай $x' \geq A$. Тоді , враховуючи (10), при $x \leq A$ вірні як (8), так і (9), і перестрахування не потрібно ($x = A$ чи $r = 1$) ні при одній з вказаних умов (рис. 3, *a*).

(2b) Нехай $x' \leq A$, а перестрахування проходить в рамках (9), тобто при прийомі нового ризику ризиковість портфеля не має зменшуватися. Тоді (рис. 3, *b*), слід вибрати $x = x'$, тобто коефіцієнт СУ $r = x' / A$, де x' визначено у (2).

(2c) Нехай $x' \leq A$, але перестрахування проходить у рамках (8). Зважаючи на (10) означає, що при прийомі нового ризику страховик готовий піти на деяке збільшення ризикованості портфеля.

Нехай $Q > t$. Тоді (рис. 3, *b*), існує розв‘язок рівняння $D(x) = Q$. Як легко перевірити, це рішення дається числом $\bar{x} = (ct + Q\sqrt{c^2 + t^2 - Q^2})/(Q^2 - r^2)$.

Якщо $\bar{x} < A$, то перестрахування потрібно і коефіцієнт СУ $r = \bar{x} / A$. Якщо $\bar{x} \geq A$, то перестрахування не потрібно: $r = 1$. Якщо $Q \leq t$, то $D(x) > t$ при всіх *x*, і перестрахування знову не потрібно, тобто $x = A$ чи *r=1.*

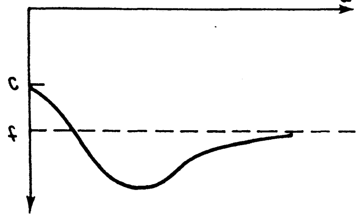


Рис. 1. **Графік функції *D(x)* для першого випадку**

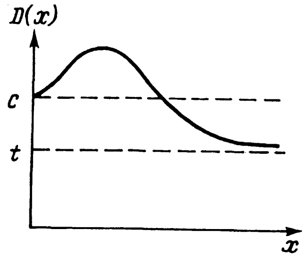


Рис. 2. **Графік загальної функції другого випадку**

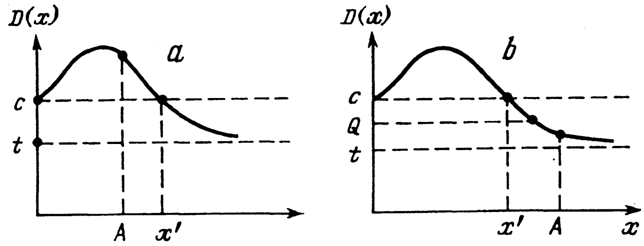


Рис. 3. **Графіки функції для випадків 2 (*a*) та 2 (*b*) другого випадку [4]**

№ договору	Сума договору	Максимальний обієм відповідальності C_i	Отримана страховиком премія T_i	Вірогідність страхового випадку p_i	Розподіл ймовірностей випадкової величини і тягаря збиткуî X_i
1	100 150	100 000	100 000	0,5	0,48
2	120 240	100 100	90 090	0,55	0,3
3	180 344	150 660	140 777	0,59	0,4
4	150 000	120 000	120 000	0,6	0,5
5	140 006	120 735	110 875	0,61	0,55
6	135 000	110 000	95 000	0,7	0,6
7	160 000	145 000	130 000	0,65	0.59
8	200 000	187 000	180 120	0,7	0,65
9	180 000	163 000	155 005	0,74	0,7
10	170 000	155 000	150 022	0,6	0,7

Чисельний приклад

***Таблиця 1.* Вихідні дані про договори СП**

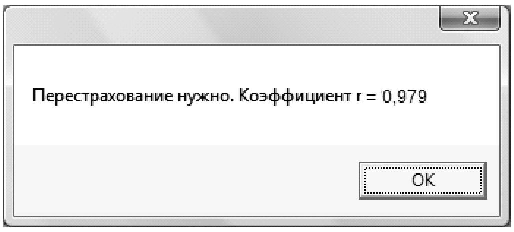
Вихідні дані для прикладу –

Для СП: Початковий капітал – 0; Сума виплат даного СП – 12 545 679;Мінімально-допустима вірогідність беззбитковості – 0,98.

Для нового договору наведено в табл. 2.

Максимальний обієм відповідальності C_i	Отримана страховиком премія T_i	Вірогідність страхового випадку p_i	Розподіл вірогідностей випадкової величини і тягаря збиткуî X_i
185 880	92 000	0,6	0,7

Таблиця 2. **Дані по додатковому договору**



У цьому прикладі страховик обирає варіант, коли при прийомі нового ризику ризикованість портфеля не зменшиться. А отже:

Висновки. Наукова новизна статті полягає у перестрахуванні ризиків. У проведеному дослідженні проаналізовано всі випадки можливості перестрахування на основі двох заданих критеріїв і визначення коефіцієнту власного утримання. Подальшим узагальненням розглянутого матеріалу може слугувати застосування до наведених вище критеріїв фактору часу і перетворення лінійної моделі у модель в умовах невизначеності.

Література:

1. Бурроу К. Основы страховой статистики / К. Бурроу // М. : Изд. центр СО “Анкил”. – 1996. – 96 с.

2. Камынкина М.Г. Перестрахование. Практическое руководство для страховых компаний / М.Г. Камынкина, Е.Е. Солнцева // М. : АО “ДИС”. – 1994. – 137 с.

3. Осадець С.С. Страхування / Керівник авт. колективу і наук. ред. С.С. Осадець. – Вид. 2-ге, перероб. і доп. – К. : КНЕУ. – 2002. – 599 с.

4. Ротарь В.И. О перестраховании рисков и величине собственного удержания страховой компании / В.И. Ротарь, С.Я. Шоргин // Экономика и математические методы. – М., 1996. – Т. 32, вип. 4. – С. 124–131.

5. Ротова Т.А. Страхування : навч. посібник / Т.А. Ротова, Л.С. Руденко. – К. : КНТЕУ, 2001. – 402 с.