УДК 519.863:330.44

Онищенко А.М.
канд. економ. наук, доцент
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
Мостинець В.С.
Національний технічний університет України "КПІ"

МАГІСТРАЛЬНІ ТРАЄКТОРІЇ ПРЯМОЇ ТА ДВОЇСТОЇ ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ ЛЕОНТЬЄВА–ФОРДА

На основі дослідження динамічної балансової еколого-економічної моделі Леонтьєва–Форда побудовано магістральні траєкторії валових випусків галузей та обсягів знищених забруднень. Перехід до відповідної двоїстої моделі та її аналіз дав можливість визначити магістралі рівноважних цін зазначених груп галузей.

In the article on the ground of the research of the dynamic Leontieff–Ford model are constructed the turnpikes of the GDP and the volumes of the ecological output. The analyze of the dual model gave the possibility to construct the turnpikes of the equilibrium prices.

Ключові слова: динамічна модель Леонтьєва–Форда, двоїста динамічна модель, магістральні траєкторії.

Вступ. На сучасному етапі економічного розвитку антропогенний вплив на довкілля призводить до загострення суперечностей між інтересами економічної й екологічної систем. Невирішеність проблем екологічного блоку невідворотно призведе до негативних трансформацій економічної, соціальної та політичної систем сучасного суспільства. В таких умовах особливої актуальності набувають питання переходу до екологічно збалансованої економіки, її науковий аналіз, що має стати основою для розробки практичних засобів стабілізації і забезпечення сталого розвитку шляхом реалізації відповідної державної політики, удосконалення економічних методів її реалізації.

З метою вирішення вказаних проблем на макрорівні слід дотримуватись певної збалансованості у взаємозв'язках виробництва, розподілу, споживання та накопичення валового продукту в розрізі видів економічної діяльності та в єдності аспектів екологічного складника. Вказаним вимогам на рівні економіко-математичного моделювання відповідають балансові моделі. Так, результатом однієї з перших спроб дослідження еколого-економічної взаємодії стала балансова модель Леонтьєва–Форда, яка узагальнює класичну балансову схему та відображає, окрім суто економічного складника, також компоненти природного комплексу [1]. Основні рівняння моделі мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + y_1,\ x_1 \ge 0, \\ x_2 &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 - y_2,\ x_2 \ge 0, \end{aligned} \qquad (1)$$

де $x_1 = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)^T$ – вектор-стовпчик обсягів матеріального виробництва; $y_1 = \left(y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1\right)^T$ – вектор-стовпчик обсягів кінцевого продукту; $A_{11} = \left(a_{ij}^{11}\right)_1^n$ – технологічна матриця коефіцієнтів прямих витрат; $x_2 = \left(x_1^2, x_2^2, \ldots, x_m^2\right)^T$ – вектор-стовпчик обсягів знищених забруднювачів; $y_2 = \left(y_1^2, y_2^2, \ldots, y_m^2\right)^T$ – вектор-стовпчик обсягів незнищених забруднювачів; $A_{12} = \left(a_{ig}^{12}\right)_1^{n,m}$ – матриця витрат продукції i на одиницю знищення забруднювачів g; $A_{21} = \left(a_{kj}^{21}\right)_1^{m,n}$ – матриця випуску забруднювачів k на одиницю випуску продукції j; $A_{22} = \left(a_{kg}^{22}\right)_1^n$ – матриця випуску забруднювачів на одиницю знищення забруднювачів .

Використання моделі для варіантних розрахунків дає змогу отримати цінну інформацію на макрорівні стосовно галузевої структури витрат на охорону навколишнього середовища, впливу їх на обсяги кінцевого та валового випуску залежно від встановленого рівня забруднення та інших показників.

Постановка завдання. Враховуючи необхідність адекватного відображення процесу неперервного розвитку еколого-економічної системи, зокрема відображення матеріальних витрат на введення в дію основних виробничих фондів, модель (1) дістала подальшої модифікації у вигляді динамічної моделі Леонтьєва–Форда [2]:

$$x_1(t)=A_{11}x_1(t)+A_{12}x_2(t)+B_1\dot{x}_1(t)+B_2\dot{x}_2(t)+y_1(t),\ x_1(t)\geq 0,\quad 2$$
$$x_2(t)=A_{21}x_1(t)+A_{22}x_2(t)-y_2(t),\ x_2(t)\geq 0.$$

де $\dot{x}_1(t)=\left(\dot{x}_1^1(t),\ \dot{x}_2^1(t),\ \ldots,\ \dot{x}_n^1(t)\right)^T$ – вектор-стовпчик абсолютних приростів виробництва продукції; $\dot{x}_2(t)=\left(\dot{x}_1^2(t),\ \dot{x}_2^2(t),\ \ldots,\ \dot{x}_m^2(t)\right)^T$ – вектор-стовпчик абсолютних приростів виробництва зі знищення забрудню-вачів; $B_1\geq 0$ – квадратна матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів основного виробництва; $B_2\geq 0$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва.

Математично введена модель являє собою формальне описання множини варіантів розвитку еколого-економічної системи або еколого-економічних траєкторій. Існування множини технологічно допустимих траєкторій дає змогу досліджувати питання вибору з певної множини оптимальних траєкторій та прогнозувати результати керуючих впливів.

Таким чином, виходячи із загальної теорії динамічних систем, поставимо задачу визначення траєкторій розвитку моделі (2), зокрема їх підкласу – магістралей. Окрім цього, розв'язання потребує проблема вартісної оцінки еколого-економіних показників. Останнє обумовлює необхідність переходу до відповідної двоїстої моделі та визначення характерних їй магістральних траєкторій. Кількісне визначення вартісних рівноважних показників та їх динаміки дозволить уникнути прорахунків в побудові системи цін, наблизить до побудови науково обгрунтованої вартісної теорії як для класичного, так і для екологічного виробництв.

Методологія. Результати дослідження отримано на основі методів економічної теорії, економіко-математичного моделювання, теорії двоїстості, диференціальних рівнянь, системного аналізу.

Результати дослідження. З математичної точки зору система (2) є системою лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами. Її розв'язок складається з загального розв'язку відповідної лінійної однорідної системи та будь-якого частинного розв'язку неоднорідної системи [3].

Будемо шукати невід'ємні розв'язки системи (2) при $y_1\equiv 0$, $y_2\equiv 0$ у вигляді

$$x_1(t)=e^{mt}x_1(0),\ x_1(0)\geq 0,$$
$$x_2(t)=e^{mt}x_2(0),\ x_2(0)\geq 0,\quad (3)$$

де m – числовий параметр.

Виразимо з другого рівняння моделі (2) змінну $x_2(t)$ та підставимо у перше рівняння

$$(I_1-A_1)x_1(t)=B\dot{x}_1(t),$$

де $A_1=A_{11}+A_{12}(I_2-A_{22})^{-1}A_{21}$, $B=B_1+B_2(I_2-A_{22})^{-1}A_{21}$, I_1 та I_2 – одиничні діагональні матриці відповідно n-го та m-го порядків.

Запишемо останню рівність з врахуванням умови (3) у вигляді

$$(I_1-A_1)e^{mt}x_1(0)=mBe^{mt}x_1(0),\ x_1(0)\geq 0$$

або в іншій формі

$$x_1(0)=m(I_1-A_1)^{-1}Bx_1(0),\ x_1(0)\geq 0.$$

У праці [2] показано, що матриця $A_1\geq 0$ продуктивна, тобто існує невід'ємна обернена матриця $(I_1-A_1)^{-1}\geq 0$.

Рівність $\left((I_1-A_1)^{-1}B-lI_1\right)x_1(0)=0$, $x_1(0)\geq 0$, $m=l^{-1}$ можлива лише за умови, що l та $x_1(0)$ є коренем Фробеніуса та правим вектором Фробеніуса матриці $(I_1-A_1)^{-1}B$ відповідно

$$l=l_{(I_1-A_1)^{-1}B}>0,\ x_1(0)=x_{(I_1-A_1)^{-1}B}\geq 0.$$

З урахуванням наведеного вище дійдемо висновку, що темпом зростання виробництва є величина

$$m=l^{-1}_{(I_1-A_1)^{-1}B}>0.$$

Частинний розв'язок системи диференціальних рівнянь (2) шукаємо за умови:

$$y_1(t)=y_1(0)e^{s_1t},\ y_1(0)\geq 0,$$

$$y_2(t) = y_2(0)e^{s_2 t}, \; y_2(0) \geq 0, \quad (4)$$

Аналогічно попередньо розглянутому випадку виразимо з другого рівняння системи (2) та підставимо у перше рівняння

Аналогічно попередньо розглянутому випадку виразимо з другого рівняння системи (2) $x_2(t)$ та підставимо у перше рівняння

$$x_1(t) = A_1 x_1(t) + B\dot{x}_1(t) - A_{12}(I_2 - A_{22})^{-1} y_2(t) - B_2 (I_2 - A_{22})^{-1} \dot{y}_2(t) + y_1(t).$$

Розглянемо спочатку таке рівняння:

$$x_1^1(t) = A_1 x_1^1(t) + B\dot{x}_1^1(t) + y_1(t).$$

Розв'язок його $x_1^1(t) = x_1^1(0)e^{s_1 t}$ визначається умовами

$$(I_1 - A_1 - s_1 B)x_1^1(0) = y_1(0). \quad (6)$$

Перейдемо тепер до розгляду такого неоднорідного рівняння:

$$x_1^2(t) = A_1 x_1^2(t) + B\dot{x}_1^2(t) - A_{12}(I_2 - A_{22})^{-1} y_2(t) - B_2 (I_2 - A_{22})^{-1} \dot{y}_2(t).$$

Розв'язок його $x_1^2(t) = x_1^2(0)e^{s_2 t}$ визначається умовами

$$(I_1 - A - s_2 B)x_1^2(0) = -(A_{12} + s_2 B_2)(I_2 - A_{22})^{-1} y_2(0), \qquad 7$$

Проаналізуємо розв'язки рівнянь (6)–(7). Існування обернених матриць для $(I_1 - A_1 - s_1 B)$ та $(I_1 - A_1 - s_2 B)$ пов'язане з продуктивністю матриць $s_1(I_1 - A_1)^{-1}$ та $s_2(I_1 - A_1)^{-1}$. З умови продуктивності матриці $s_1(I_1 - A_1)^{-1} B \geq 0$ випливає умова $s_1 \lambda_{(I_1 - A_1)^{-1} B} < 1$, що в свою чергу еквівалентно умові

$$s_1 < \mu = \lambda^{-1}_{(I_1 - A_1)^{-1} B}.$$

Відповідний аналіз умови продуктивності матриці $s_2(I_1 - A)^{-1} B \geq 0$ в (7) приводить до умови

$$s_1 < \mu = \lambda^{-1}_{(I_1 - A_1)^{-1} B}$$

Таким чином, об'єднуючи отримані результати, отримуємо загальний розв'язок системи (2) у такому вигляді

$$x_1(t) = Ce^{\mu t} x_{(I_1 - A_1)^{-1} B} + e^{s_1 t}(I_1 - A_1 - s_1 B)^{-1} y_1(0) - e^{s_2 t}(I_1 - A_1 - s_2 B)^{-1}(A_{12} + s_2 B_2)(I_2 - A_{22}) y_2(0)$$

Отримана функція дає можливість визначати валові обсяги випуску матеріального виробництва в часі. Аналіз отриманого розв'язку при дає змогу встановити, що визначальним в ньому є перший доданок. Тому магістраллю для валового випуску $x_1(t)$ є правий вектор Фробеніуса матриці $(I_1 - A_1)^{-1} B$.

Двоїста динамічна модель Леонтьєва–Форда. Відмінна особливість моделей міжгалузевого балансу полягає в тому, що це єдиний тип моделей, в яких акумулюється інформація відносно міжгалузевих взаємозв'язків. Саме ця особливість дозволяє простежувати вплив зміни економічних показників на міжгалузеву структуру економіки. При цьому, окрім натуральних показників, такі моделі можуть перейти до вартісних – цінових індексів.

У праці [4] запропоновано відповідну моделі (2) динамічну модель Леонтьєва–Форда у вартісному вираженні (модель цін). Її запис формалізується у такому вигляді:

$$p_1(t) = p_1(t)A_{11} + p_2(t)A_{21} - \dot{p}_1(t)B_1 + r_1(t),$$
$$p_2(t) = p_2(t)A_{12} + p_2(t)A_{22} - \dot{p}_1(t)B_2 + r_2(t), \qquad (8)$$

де $p_1(t)$ та $p_2(t)$ – вектори-рядки цін, а $r_1(t)$ та $r_2(t)$ – вектори-рядки доданих вартостей.

Як і в попередньому випадку, математично наведена модель є системою неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами. Тому в умовах поставленої задачі – визначення магістральних траєкторій – реалізуємо методику дослідження, аналогічну проведеній попередньо.

Перейдемо до розгляду відповідної однорідної системи диференціальних рівнянь:

$$p_1(t) = p_1(t)A_{11} + p_2(t)A_{21} - \dot{p}_1(t)B_1,$$
$$p_2(t) = p_2(t)A_{12} + p_2(t)A_{22} - \dot{p}_1(t)B_2.$$

Будемо шукати розв'язки отриманої системи у вигляді:

$$p_1(t) = e^{vt} p_1(0),$$
$$p_2(t) = e^{vt} p_2(0).$$

З урахуванням останнього система лінійних однорідних диференціальних рівнянь визначається розв'язками:

$$p_1(0) = p_1(0)A_{11} + p_2(0)A_{21} - vp_1(0)B_1,$$
$$p_2(0) = p_1(0)A_{12} + p_2(0)A_{22} - vp_1(0)B_2.$$

Провівши серію нескладних математичних перетворень, отримуємо рівність

$$p_1(0)\left(I + vB(I_1 - A_1)^{-1}\right) = 0$$

або в іншому вигляді

$$p_1(0)\left(B(I_1 - A_1)^{-1} - \lambda I_1\right) = 0,\ p_1(0) \geq 0,\ v = -\lambda^{-1}.$$

Тоді

$$\lambda = \lambda_{B(I_1 - A_1)^{-1}} > 0,\ p_1(0) = p_{B(I_1 - A_1)^{-1}} \geq 0,$$
$$v = -\mu = -\lambda^{-1}_{(I_1 - A_1)^{-1}B} < 0,$$

де $\lambda_{B(I_1 - A_1)^{-1}} > 0$ – корінь Фробеніуса, а $p_{B(I_1 - A_1)^{-1}} > 0$ – лівий вектор Фробеніуса матриці $B(I_1 - A_1)^{-1}$. При цьому, як легко перевірити,

$$\lambda_{B(I_1 - A_1)^{-1}} = \lambda_{(I_1 - A_1)^{-1}B}.$$

На наступному кроці будемо розглядати неоднорідну систему (8) за умови $r_1(t) = e^{k_1 t} r_1(0)$, $r_1(0) \geq 0$, $r_2(t) = e^{k_2 t} r_2(0)$, $r_2(0) \geq 0$. Відповідні розв'язки $p_1(t) = p_1(0)e^{vt}$, $p_2(t) = p_2(0)e^{vt}$ визначаються співвідношеннями:

$$e^{vt} p_1(0) = e^{vt} p_1(0)A_{11} + e^{vt} p_2(0)A_{21} - ve^{vt} p_1(0)B_1 + e^{k_1 t} r_1(0),$$
$$e^{vt} p_2(0) = e^{vt} p_1(0)A_{12} + e^{vt} p_2(0)A_{22} - ve^{vt} p_1(0)B_2 + e^{k_2 t} r_2(0).$$

Виразимо з другого рівняння добуток $e^{vt} p_2(0)$ та використаємо в першому рівнянні:

$$e^{vt} p_1(0)(I_1 - A_1 + vB) = e^{k_1 t} r_1(0) + e^{k_2 t} r_2(0)(I_2 - A_{22})^{-1} A_{21}.$$

Розв'язок цього рівняння розіб'ємо на два розв'язки $p_1^1(0)$ та $p_1^2(0)$. Проведемо спочатку дослідження рівняння $e^{vt} p_1(0)(I_1 - A_1 + v_1 B) = e^{k_1 t} r_1(0)$ за умови, що $v = k_1$, тобто рівняння $p_1(0)(I_1 - A_1 + k_1 B) = r_1(0)$. Існування оберненої матриці пов'язане з продуктивністю $(I_1 - A_1 + k_1 B)^{-1}$ пов'язане з продуктивністю матриці $-k_1 B(I - A)^{-1} \geq 0$, що еквівалентне умові

$$-k_1 \lambda_{B(I_1 - A_1)^{-1}} < 1,$$

тобто маємо

$$k_1 > -\mu = -\lambda^{-1}_{(I_1 - A_1)^{-1}B}.$$

Розглянемо тепер рівняння

$e^{vt} p_1(0)(I_1 - A_1 + vB) = e^{k_2 t} r_2(0)(I_2 - A_{22})^{-1} A_{21}$ за умови $v = k_2$:

$$p_1(0)(I_1 - A_1 + k_2 B) = r_2(0)(I_2 - A_{22})^{-1} A_{21}.$$

З продуктивності матриці $(I_1 - A_1 + k_2 B)$ випливає, що

$$-k_2 \lambda_{(I_1 - A_1)^{-1} B} < 1,$$

тобто маємо

$$k_2 > -\mu = -\lambda^{-1}_{(I_1 - A_1)^{-1} B} .$$

Отже, загальний розв'язок рівняння (8) визначає функція:

$$p_1(t) = Ce^{-\mu t} p_{B(I_1 - A_1)^{-1}} + e^{k_1 t}(I_1 - A_1 + k_1 B) r_1(0) + e^{k_2 t}(I_2 - A_{22})^{-1} A_{21} (I_1 - A_1 + k_2 B)^{-1} r_2(0).$$

Отримана функція визначає траєкторію зміни цін за часом. Аналіз отриманого розв'язку при $t \to \infty$ дає можливість вказати, що визначальними є другий та третій доданки, а вектори або r_2 залежно від $\max(k_1, k_2)$ визначають магістральну траєкторію цін.

Висновки. У проведеному дослідженні проаналізовано пряму та двоїсту динамічні моделі Леонтьєва-Форда. Зокрема, для кожного виду визначено магістральні траєкторії валових випусків та рівноважних цін. Подальшим узагальненням розглянутого матеріалу може слугувати можливість застосування до наведених вище моделей введених у праці [5] додаткових гіпотез стосовно балансових моделей "витрати-випуск".

Література:

1. Леонтьев В. Межотраслевой анализ воздействия структуры экономики на окружающую среду / В. Леонтьев, Д. Форд // Экономика и математические методы. – М., 1972. – Т. 8, вып. 3. – С. 370–399.

2. Ляшенко І.М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку / І.М. Ляшенко. – К. : Вища шк., 1999. – 236 с.

3. Самойленко А.М. Дифенціальні рівняння : підр. / А.М. Самойленко, М.О. Перестюк, І.О. Парасюк. – К. : Либідь. – 2003. – 600 с.

4. Ляшенко І.М. Прямі та двоїсті балансові моделі "витрати-випуск" / І.М. Ляшенко, А.М. Онищенко // Економічна кібернетика. – Донецьк, 2009. – № 1-2.

5. Ляшенко І.М. Економічні гіпотези та динаміка рівноважних цін в моделі Леонтьєва "витрати-випуск" / І.М. Ляшенко, О.І. Ляшенко, А.М. Онищенко // Економічна кібернетика. – Донецьк, 2009. – № 3–4.

r_1